Porcentaje económico en vigas i lozas de concreto armado

POR

CÁRLOS ALLIENDE ARRAU

(Traduccion resumida del ingles, de Rohentan N. Fram Mioza)

En el presente artículo se establecen algunas ecuaciones para probar que en todas las construcciones de concreto armado destinadas a resistir esfuerzos de traccion, hai un solo porcentaje de acero que conduce al menor costo. Este depende de los valores comerciales del acero i concreto, teniéndose presente que el acero es de los dos materiales el mas caro.

El costo de la *obra de mano* i el del *material* varian con las localidades; i es evidente que el costo mínimum de construccion puede ser obtenido con varios porcentajes de acero segun los precios de las distintas rejiones. El porcentaje que da la máxima economía en el valor total es *mui diferente* del porcentaje que produce las mayores resistencias en los dos materiales. Este último se tilda a veces de *porcentaje económico*, lo cual es falso i se presta a erradas interpretaciones para los proyectistas de obras de concreto armado.

Aunque la deduccion de las ecuaciones que siguen es algo complicada, su aplicacion final es sencilla.

s el precio del acero por libra en peniques.

q el precio del concreto por pulgada cúbica en peniques.

G el precio de moldes, armadura, etc., por *pulgada cuadrada* en *peniques*.

Sean ademas:

b=ancho en pulgadas.

d=espesor en pulgadas.

$M=\frac{E_s}{E_c}=$ relacion de los modulos de elasticidad (jeneralmente 15)

M=momento flexionante en libras-pulgadas.

t=tasa de trabajo del acero por pulgada cuadrada.

c = tasa de trabajo del concreto por pulgada cuadrada.

z = distancia de la resultante D a la fibra estrema comprimida, en pulgadas.

Kd = distancia del eje neutro a la fibra estrema comprimida, en pulgadas.

$A_c = K d b$ = área del concreto que trabaja a compresion en pulgadas cuadradas.

A_t = área del acero en pulgadas cuadradas.

$p = \frac{A_t}{bd}$ = razon entre el área del acero i la del concreto.

P = 100 p = porcentaje del acero (tanto por ciento).

l = luz en pulgadas.

ω = sobrecarga por pulgada corrida en libras.

W = peso en libras por pulgada cuadrada.

En caso de que las vigas o losas tengan armadura solo en su parte inferior, la distancia del eje neutro a la fibra comprimida es:

$$Kd = -\frac{m A_t}{b} + \frac{m (A_t)}{b}\sqrt{1 + \frac{2 b d}{m (A_t)}}$$

De aquí se deduce:

$$K = -\frac{m A_t}{b d} + \frac{m A_t}{b d}\sqrt{1 + \frac{2 b d}{m (A_t)}}$$

Introduciendo el valor de p:

$$K = -p m + \sqrt{p^2 m^2 + 2 p m}$$

Ademas se tiene:

$$z = \frac{1}{3} K d$$

$$M = c b \frac{K d}{2}\left(d - \frac{1}{3} K d\right) = \frac{c}{2} K \left(1 - \frac{1}{3} K\right) b d^2$$

Esta última espresion puede escribirse:

$$M = C b d^2$$

siempre que:

$$C = \frac{c}{2} K \left(1 - \frac{1}{3} K\right)$$

Se observa que C depende de p i c. La práctica corriente autoriza el adoptar para c el valor de 600 lbs por pulgada cuadrada (corresponde a 40 K por milímetro cuadrado mas o ménos). Si se introduce este valor en la ecuacion anterior C queda espresado solamente en funcion de p.

El autor por su parte ha deducido para *C* una ecuacion jeneral bastante aproximada que difiere sólo en 1 a 1,5 por ciento del valor exacto i que es la siguiente:

$$C = \frac{162 \; P}{P + 0{,}5}$$

Esta fórmula se refiere al caso de $c = 600$ lbs por pulgado cuadrada. Para un caso jeneral ella sería:

$$C = \frac{N \; P}{P + M}$$

Si se deja una pulgada de concreto como proteccion contra el fuego, el volúmen de material usado con este objeto para una viga o losa de luz *l* es *lb* pulgadas cúbicas i el volúmen total será:

$$\text{Volúmen total del concreto} = (lbd + lb) \text{ pulgadas cúbicas}$$

El volúmen del acero será:

$$\text{Volúmen acero} = (A_t \, l) = p \, b \, d \, l = \left(\frac{P}{100} \, l \, b \, d\right) \text{ pulgadas cúbicas}$$

Llamando *f* el peso del acero en libras por pulgada cúbica, se tiene el peso del acero empleado:

$$\text{Peso acero} = \$ \, f \frac{lbd \, P}{100} \text{ lbs.}$$

Por otra parte, la superficie total de moldes que se necesita será $l\,(2\,d + b)$.

Con los datos anteriores se puede establecer el cost total de la estructura, sea ésta una losa o viga:

$$T_c = lbd \cdot q + lbq + f \frac{lbd \, P}{100} s + G \, l \, (2d + b) \quad (1)$$

Si se toma 150 libras como peso del concreto por pié cúbico, el peso de la viga o losa será igual a 0,085 lbd libras; i si W ès la sobrecarga por pulgada cuadrada, el momento total será:

$$M = \frac{W \, lb \times l}{\psi} + \frac{0{,}085 \, lbd \times l}{\psi} \text{ libras pulgadas}$$

En esta espresion ψ puede ser 8,12, etc., segun la forma en que se presenten los apoyos de la viga.

Llamemos: $\qquad \dfrac{W \, l^2}{\psi} = \alpha \qquad$ i $\qquad \dfrac{0{,}0865 \, l^2}{\psi} = \beta$

Como $M = C\,b\,d^2$, se tiene:

$$C\,bd^2 = \alpha\,b + \beta\,db$$

i

$$d = \frac{\beta}{2\,C} + \sqrt{\frac{\alpha}{C} + \frac{\beta^2}{4C^2}}$$

El término $\frac{\beta}{4\,C^2}$ es mui pequeña, pudiéndose despreciarlo; en cuyo caso quedaria *d* como sigue:

$$d = \frac{\beta + 2\sqrt{\alpha\,C}}{2\,C} \qquad (2)$$

Se ha visto ántes que $C = \frac{N\,P}{P + M}$. De aquí se deduce:

$$P = \frac{M\,C}{N - C}$$

Sustituyendo el valor de *d* i *P* en ecuacion (1), se obtiene:

$$(3)\quad T^c = l\,b\,q\left[\frac{\beta + 2\sqrt{\alpha\,C}}{2\,C}\right] + l\,b\,q + \frac{M\,f\,l\,b}{200}\,s\left[\frac{\beta + 2\sqrt{\alpha\,C}}{N - C}\right] + G\,l\left[\frac{\beta + 2\sqrt{\alpha\,C}}{C} + b\right]$$

Se ha espresado, en suma, el costo en funcion únicamente de C, o sea, en funcion del porcentaje P, puesto que las demas cantidades que entran en (3) son constantes.

El valor de C correspondiente al costo mínimum se obtiene haciendo $\frac{\alpha\,T_c}{\alpha\,C} = o$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,T_c}{d\,C} &= l\,b\,q\left(-\frac{\beta + \sqrt{\alpha\,C}}{2\,C^2}\right) + \frac{M\,f\,l\,b}{200}\,s \\ &\times\left(\frac{N\sqrt{\alpha} + \sqrt{C}\,(\beta + \alpha\sqrt{C})}{\sqrt{C}\,(N - C)^2}\right) + G\,l\left(-\frac{\beta + \sqrt{\alpha\,C}}{C^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Llamando $\frac{s}{q} = R$ i $\frac{2\,G}{q\,b} = \lambda$, se tiene:

$$-\frac{\beta + \sqrt{\alpha\,C}}{C^2} + \frac{M\,f\,R}{100}\left(\frac{N\sqrt{\alpha} + \sqrt{C}(\beta + \sqrt{\alpha\,C})}{\sqrt{C}\,(N - C)^2}\right) + \gamma\left(-\frac{\beta + \sqrt{\alpha\,C}}{C^2}\right) = 0 \; (5)$$

$$-\frac{\beta + \sqrt{\alpha\,C}}{C^2}\,(1 + \gamma) + \frac{M\,f\,R}{100}\left(\frac{N\sqrt{\alpha} + \sqrt{C}\,(\beta + \sqrt{\alpha\,C})}{\sqrt{C}\,(N - C^2)}\right) = 0 \; (6)$$

Esta ecuacion es bastante complicada debido a la presencia de β. El autor ha encontrado que si se desprecia β, resulta una disminucion en el valor de C de mas o ménos 4 %, lo cual es motivo suficiente para prescindir de ella, tomándola en cuenta solo despues de resuelta la ecuacion. Se sabe que:

$$\beta = \frac{0.0865\, P^2}{\psi}$$

Se puede poner tambien:

$$\beta = \frac{0.0865\, \alpha}{W}$$

Despreciando, pues, β la ecuacion (6) se transforma así:

$$-\frac{1}{C} + \frac{M f}{100} \frac{R}{(1+\gamma)} \left\{ \frac{N+C}{(N-C)^2} \right\} = 0 \qquad (7)$$

Pongamos $n = \frac{100}{M f}$ i $R_1 = \frac{R}{1+\gamma}$ se tiene:

$$C = \frac{2\, N\, n}{\sqrt{R_1^2 + 8\, R_1\, n} + R_1 + 2\, n} \qquad (8)$$

Se puede demostrar que el error resultante de no tomar en cuenta el termino R_1^2 bajo el radical es pequeño, lo cual induce a no tomarlo en cuenta; en cuyo caso la ecuacion (8) se reduce á:

$$C = \frac{2\, N\, n}{2\sqrt{2\, R_1\, n} + R_1 + 2\, n} \; 1.04$$

Esta ecuacion se ha multiplicado por 1.04 para corregir el error al despreciar a β. Finalmente:

$$C = \frac{2\, N\, n \; 1.04}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{2\, n})^2} \qquad (9)$$

Introduciendo los valores de R_1 i n:

$$C = \frac{200\, N \cdot 1.04}{M f \left[\sqrt{\frac{R}{1+\gamma}} + \sqrt{\frac{200}{M f}} \right]^2} \qquad (10)$$

Dando a N, M i f los valores de *165*, *0.5* i *0.29* (se supone 490 libras por pié cúbico el peso del acero), se tiene:

$$C = \frac{232\,900}{\left[\sqrt{\frac{R}{1+\gamma}} + 37\cdot 1\right]^2} \qquad (11)$$

La ecuacion anterior se aplica a losas i a vigas. En el caso especial de losas, *b* es una cantidad mui grande comparativamente a la profundidad i la espresion $\gamma = \frac{2\,G}{9\,b}$ es mui pequeña comparada con la unidad, pudiendo en consecuencia escribirse:

$$C = \frac{232\,900}{(\sqrt{R} + 37.1)^2} \qquad (12)$$

o en jeneral:

$$C = \frac{A}{(\sqrt{R} + B)^2} \qquad (13)$$

Con estos valores puede fácilmente calcularse el valor del porcentaje correspondiente al costo mínimo.

Usando el valor conveniente de C es fácil obtener proyectos de poco costo. Sin duda, pueden presentarse casos en que otras consideraciones induzcan a los injenieros a dejar a un lado la cuestion economia; pero el autor está en condiciones de asegurar con su propia esperiencia que el empleo de las fórmulas anteriores ahorra tiempo i da resultados mui satisfactorios en la práctica.

En todo lo anterior se ha considerado un esfuerzo de 600 libras por pulgada cuadrada para el concreto a la compresion; pero si se toma otro valor, como ser 750 libras por pulgada cuadrada, puede obtenerse una ecuacion funcion de P i C de la misma forma, i pequeña variacion en los coeficientes

$$C = \frac{c}{2}\,K\left(1 - \frac{1}{3}\,K\right) = \frac{750}{2}\cdot\frac{0{,}54\ P}{P + 0{,}5} = \frac{202{,}5\ P}{P + 0{,}3}$$

La ecuacion del costo total puede tambien espresarse en funcion del espesor de la losa o viga, siendo probablemente mas fácil hacerlo en esta forma que en funcion de C; pero al establecer el costo mínimo, la resolucion del problema se complica.

Como conclusiones de todo lo anterior, se pueden establecer las siguientes:

1) Hai un solo valor del porcentaje que da el costo mínimo i este costo depende del precio del acero i concreto, incluyendo andamios, etc., etc.

2) No es siempre económico realizar el trabajo máximo en el acero i concreto.

La mayor eficiencia resistente que semejante criterio proporciona, se realiza a espensas de la economía.

3) Del mismo modo, hai un solo porcentaje que da el costo mínimo en las vigas, el cual depende del costo del acero i concreto, incluso trabajo de andamios, etc.

4) El valor del porcentaje que da el costo mínimo es mas alto para las vigas que para los losas, en vista de que en estas últimas se requiere comparativamente a las primeras poco andamiaje por unidad corrida. Si se presenta el caso especial de losas que necesitan mucho andamiaje, etc., relativamente a su profundidad, será conveniente tratarlo como vigas.

5) Si el acero tiene precio mui alto, conviene emplear material mui resistente.