Abaco para el cálculo de cañerías.—Fórmulas de H. Lang y Flamant

POR

Ricardo Solar P. y Marcos Pedrero S.

Las fórmulas para calcular la pérdida de carga en las cañerías son generalmente complicadas, por lo cual se han tabulado o construido abacos de las principales de ellas, con el objeto de hacer más cómoda su aplicación.

Entre ellas, una de las más recomendadas, según opinión del profesor Brœckman, es la de H. Lang; fórmula obtenida de acuerdo con las principales experiencias sobre la materia, hecha hasta 1910, fuera de observaciones particulares del autor. Se encuentran tabuladas en el «Hütte» alemán.

En esas tablas se relacionan los valores de U, D, y J, de (velocidad, diámetro y pérdida de carga) modo que permiten dadas dos de esas cantidades, calcular la tercera. Pero puede en la práctica presentarse el caso en que se conozca el gasto Q y la pérdida de carga aceptable J, y tratarse de calcular U y D; las tablas no permiten resolver directamente ese problema pues no entra Q, y habría que hacerlo por tanteos y aproximaciones sucesivas y admitiendo cierto U por ejemplo las tablas darían D y se verificaría si con ese U y D, resultaba el Q dado; en caso contrario habría que comenzar de nuevo hasta tener un valor cercano y seguir por aproximaciones.

Esto como se comprende es odioso. Por otra parte las tablas están hechas para diámetros hasta de un metro y velocidades de dos metros por segundo; lo que es muy limitado, pues, para fuerza motriz, por ejemplo, es corriente usar diámetros de 1,50 y 2 mtrs., con velocidades de 2 a 3 mtrs. por segundo.

En vista de lo anterior y de no existir una representación gráfica de esta fórmula, presentamos a los ingenieros y estudiantes, el abaco siguiente, que permite resolver todos los problemas anteriores, pues liga U, D, Q y J y dados dos datos cualesquiera permite por una simple lectura, encontrar los otros dos restantes.

Nuestra primera idea fué hacer el abaco únicamente para la fórmula de Lang; pero como los ejes U D y Q con la graduación establecida para la fórmula de Lang podían utilizarse para cualesquiera otra fórmula para el cálculo de cañerías (Flamant, Weisbach, Franck, Kutter, Darcy, Lévy, Lamp, etc.), bastando sólo agregar un eje para las de forma monomia como la de Flamant ($J = C^{te}. U^n D^m$); y dos ejes para las binomias como las de Lang ($J = J' + J' = \alpha U^n D^m + \beta U^{n_1} D^{m_1}$) en que α, β, ^{n}, ^{m}, ^{n_1}, ^{m_1} son las constantes que caracterizan cada fórmula); hemos creído conveniente tomar una de forma monomia y entre ellas hemos elegido la de Flamant.

TEORÍA DEL ABACO

Como el estudio de los abacos es un ramo de mucha utilidad, comenzaremos por explicar la teoría de uno de los sistemas más importantes, el de «Puntos alineados», que es el que vamos a aplicar.

Sea una ecuación de la forma:

$$a. x + b. y = W$$

entre las variables x. y, W para la cual queremos hacer un abaco.

Para establecer la teoría consideremos dos fuerzas paralelas a y b, de dirección cualquiera cuyos puntos de aplicación se encuentren sobre los ejes fijos X e Y y cuyas ordenadas respecto a un eje arbitrario H sean x e y.

Es fácil demostrar, tomando ecuación de momento, que el lugar geométrico de los puntos de aplicación de la resultante (a + b), será el eje Z paralelo a los anteriores y situados a una distancia del eje X.

$$\delta = \frac{b\, d}{a + b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cuando se trata de hacer un abaco, la distancia d se elige convenientemente, a y b son datos del problema; por consiguiente las distancias relativas de los tres ejes quedan determinadas por la ecuación (1).

También por ecuación de momento se deduce que la ordenada z de la resultante (a + b) tiene por valor

$$z = \frac{a\,x + b\,y}{a + b} = \frac{W}{a + b}$$

$$\text{luego} \quad (a + b).z = a.x + b.y = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De esta ecuación se deduce que podemos determinar fácilmente el valor de la función W, para cualquier sistema de valores x e y dados. En efecto, bastará llevar sobre los ejes las magnitudes x e y; la intersección de la recta que une los puntos de aplicación, con el eje Z, nos dará el valor de z y para obtener W bastará multiplicar por (a + b). Para evitar esta multiplicación y obtener por medio de una simple lectura en el eje Z el valor de la función W, podemos hacer la graduación de los ejes, llevando sobre ellos magnitudes proporcionales a las cantidades:

$$x\ ,\ \frac{W}{a+b}\ ,\ y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

pero teniendo cuidado de anotar los valores

x W y correspondientes.

Se comprende que en la ecuación anterior no sólo se puede determinar *W* sino cualquiera de las otras incógnitas dadas las dos restantes.

La teoría desarrollada anteriormente puede aplicarse a las funciones de la forma siguiente:

$$z^p = \alpha . x.^q\, y^r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

$$z^p = \alpha . x^{q \cdot y^r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

necesitando sólo tres ejes; o expresiones de la forma combinada tales como:

$$z^p = \alpha . x.^q\, y^r + \beta . x.^s\, y^t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

$$z^p = \alpha . x^{q \cdot y^r} + \beta . y^{s \cdot y^t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

$$z^p = \alpha . x.^q\, y^r + \beta . x^{s \cdot y^t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

que necesitan cuatro ejes, salvo casos especiales en que pueden reducirse a tres.

En efecto, se pueden transformar fácilmente y darle la forma de la ecuación (2) y aplicar la teoria ya desarrollada.

La ecuación (4) aplicando logaritmos da:

$$\log \frac{z^p}{\alpha} = \log x^q + \log y^r$$

$$\log \frac{z^p}{\alpha} = q . \log x + \log y^r$$

La ecuación (5) puede igualmente tomar varias formas adecuadas, tales como

$$\log \frac{z^p}{\alpha} = q . y .^r \log x$$

$$\log \left[\log \frac{z^p}{\alpha} \right] = \log q\, y^r + \log [\log x]$$

$$\log \left[\frac{1}{q} \log \frac{z^p}{\alpha} \right] = \log y^r + \log [\log x]$$

La fórmula de Lang pertenece al tipo (6), y la de Flamant al (4).

APLICACIÓN A LA FÓRMULA DE H. LANG

La variedad de fórmulas que existen para determinar las pérdidas de carga en las cañerías, se diferencian en la expresión del coeficiente b de la fórmula general conocida:

$$\frac{D.J.}{4} = b.u^2$$

Según H. Lang:

$$b = \frac{1}{8g.}\left[0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{UD}}\right]$$

siendo g la aceleración de la gravedad.

Reemplazando el valor b y despejando J, obtenemos

$$J. = 0,00102\,\frac{U^2}{D} + 0,000092\left(\frac{U}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$$

fórmula en la cual:

U velocidad media en metros por segundo
D diámetro de la cañería en metros
J pérdida de carga en metros por metros de longitud

Para evitar el gran número de cifras, es más conveniente expresar la *pérdida de carga en milímetros por metro de cañería* (o lo que es lo mismo metros por kilómetros), para lo cual basta multiplicar por mil el valor anterior; luego en estas unidades

$$J = 1,02\,\frac{U^2}{D} + 0,092\left(\frac{U}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Para estudiar el abaco designamos por α y β los dos coeficientes numéricos constantes, tendremos

$$J = \alpha\,\frac{U^2}{D} + \beta\left(\frac{U}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$$

La pérdida de carga J se puede descomponer en dos términos,

$$J = J' + J''$$

siendo $$J' = \alpha\,\frac{U^2}{D}$$

y $$J'' = \beta \left(\frac{U}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1ª PARTE

Abaco para $$J'' = \beta \left(\frac{U}{D}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Tomando logaritmos obtenemos:

$$\log \frac{J''}{\beta} = \frac{3}{2}\left[\log U - \log D\right]$$

o sea

$$\log U = \frac{2}{3} \log \frac{J''}{\beta} + \log D$$

Esta fórmula es análoga a la ecuación (2) $W = a.x + b.y$
En efecto:

$$w = \log U$$

$$x = \log \frac{J''}{\beta}$$

$$y = \log D$$

$$a = {}^2/_3$$

$$b = 1$$

Si designamos los ejes por *J''* *U* y *D*, y por *d* la distancia entre los ejes *J''* y *D*, tendremos según la ecuación (1):

$$\delta = \frac{b\,d}{a+b} = \frac{d}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}d \qquad \text{fig. 2.}$$

Sobre los ejes *J''* *U* y *D* debemos hacer la graduación llevando sobre ellos magnitudes proporcionales a las cantidades

$$\log \frac{J''}{\beta} \;,\quad \frac{\log U}{\frac{2}{3}+1} \;,\quad \log D \quad \left[\text{según fórms. (3)}\right]$$

pero anotando los valores

J'' , U y D correspondientes.

2.ª PARTE

Abaco para $$J' = \frac{\alpha U^2}{D}$$

En este caso nos proponemos utilizar los mismos ejes *U* y *D* con sus graduaciones tales como se han hecho en la 1.ª Parte.

Elevando a un exponente *n*, que determinaremos por la condición de coincidencia de las escalas, tendremos:

$$\left(\frac{J'}{a}\right)^n = \frac{U^{2n}}{D^n}$$

o sea:

$$2.n.\log U = \log\left(\frac{J'}{a}\right)^n + n.\log D$$

Para hacer un abaco de esta fórmula debemos llevar sobre los ejes cantidades proporcionales a:

$$\log\left(\frac{J'}{a}\right)^n, \quad \frac{2\,n}{1+n}\log U \quad , \quad \log D \left[\text{según fórms. (3)}\right]$$

y según ecuación (1) tenemos:

$$\delta' = \frac{n\,d'}{1+n} \qquad \text{fig. 3.}$$

La condición de coincidencia de los ejes *U* y *D*, nos dá:

$$d' - \delta' = d - \delta$$

o sea

$$d' - \frac{n\,d'}{1+n} = d - 3/5\ d$$

$$d = 2/5\ (1+n).\ d$$

La condición de coincidencia de la graduación nos dá:

$$\frac{2\,n}{1+n}\log\ U = \frac{\log U}{\frac{2}{3}+1}$$

de donde se deduce fácilmente

$$n = 3/7$$

y por consiguiente

$$d' = \frac{2}{5}(1+n).\ d = 4/7\ d$$

3.ª PARTE

Abaco para $\qquad Q = \frac{\pi}{4} D^2\, U$

El estudio para este caso es análogo al de la segunda parte (condición de coincidencia de los ejes *U* y *D*, y de sus graduaciones con los de la 1.ª parte, etc.); por este motivo indicaremos sumariamente su cálculo:

$$\left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^{n'} = D^{2\,n'} \cdot U^{n'}$$

$$n'.\ \log U = \log\left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^{n'} - 2.\ n.'\log D$$

Según la condición de coincidencia de las escalas, tenemos:

$$\frac{n'}{1-2\,n'} = \frac{3}{5}$$

de donde

$$n' = \frac{3}{11}$$

Según fórmula (1)

Fig. 4. $$\delta'' = \frac{-2\,n'\,d'}{1-2\,n'} = -\frac{6}{5}\,d''$$

La condición de coincidencia de *U* y *D* nos da:

$$\frac{6}{5}\,d'' + d'' = d - \delta = \frac{2}{5}\,d$$

y finalmente

$$d'' = \frac{2}{11}\,d$$

Fórmula de Flamant

$$J = \frac{a.U^{\frac{7}{4}}}{D^{\frac{5}{4}}}$$

en que $a = 0{,}92$ expresando la pérdida de carga *J* en milímetros por metro de largo.

El abaco paro esta fórmula es análogo al de 2.ª y 3.ª partes.

$$\left(\frac{J}{a}\right)^{n''} = \frac{U^{\frac{7}{4}.n''}}{D^{\frac{5}{4}.n''}}.$$

$$\frac{7}{4}\,n''\log U = \log\left(\frac{J}{a}\right)^{n''} + \frac{5}{4}\,n''.\ \log D$$

$$\frac{\frac{7}{4} n''}{1+\frac{5}{4} n''} = \frac{3}{5} \quad \left[\begin{array}{l}\text{Condición de coincidencia}\\ \text{de las escalas.}\end{array}\right]$$

$$n'' = \frac{3}{5}$$

Además tenemos (condición de coincidencia de los ejes) según ecuación (1).

$$\delta''' = \frac{\frac{5}{4} n'' d'''}{1+\frac{5}{4} n''} = \frac{3}{7} d'''$$

$$d''' - \delta''' = \frac{4}{7} d''' = \frac{2}{5} d$$

$$d''' = \frac{7}{10} d$$

Nota.—A continuación indicamos en fig. 6 la posición relativa de los ejes y las magnitudes que hay que llevar sobre ellos para hacer la graduación.

El abaco que hemos calculado lo dibujamos tomando los valores que se indican en la fig. 4.

MANERA DE USAR EL ABACO

El problema general es: dadas *dos* de las cuatro cantidades *D*, *Q*, *U*, *J*; determinar las otras dos. Como las cuatro variables se encuentran sobre una misma recta, los dos valores dados ubican la recta; la intersección de ésta con los otros ejes da los valores correspondientes de las otras variables.

Ejemplo:—Datos D=0,80 mtr. U=1,00 mtr/s. sgdo. Uniendo esos dos puntos se obtiene la recta dibujada (x) como ejemplo en el abaco; su intersección con el eje Q da Q=0,500 m ^{3}/s.

del mismo modo J_F (Flamant) = 1,22 m/m por mtro.
y J_L (Lang) = 1,27 + 0,13 = 1,40 m/m por mtro.

Los valores exactos según las tablas de Flamant y Lang, son:

	Abaco	Diferencias en %
Q = 0,503 m ^{3}/s.	0 500	0,6 %
J_F = 1,21 mm/mtro.	1,21	0,0 »
J_L = 1,402 mm/mtro.	1,40	0,1 »

(1) No es necesario dibujar la recta, basta reemplazarla por un hilo tenso, el canto de una regla, o una recta trazada sobre una faja de tela de calco.

Se observa que las diferencias son todas menores del 1%; exactitud más que suficiente, ya que con las mejores fórmulas de hidráulica tales como la de vertederos sólo se llega al 5%.

Otro caso:—Cualquier otro par de datos que se den se resolverá lo mismo que el caso anterior.

Si se da por ej.: J y Q (caso que no se puede resolver directamente por las tablas de Lang sino por largos tanteos, por relacionar las tablas solamente D, U y J y no conocerse D ni U sino $Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot U$); basta hacer girar la recta en torno del punto Q, hasta que

$J'_L + J''_L$ iguale al J_L dado; esto es rapidísimo por ser J'' pequeño en comparación de J'.

Con J_F (Flamant) es más fácil todavía.

Terminaremos haciendo notar una de las tantas ventajas que tiene este método sobre el de las tablas, y es el de obtener en un mínimo de tiempo sin necesidad de interpolación algebráica ni cálculo de ninguna especie, los valores simultáneos de las cuatro variables D, Q, U y J; y todo esto con una grande exactitud.

7 de Febrero de 1915.

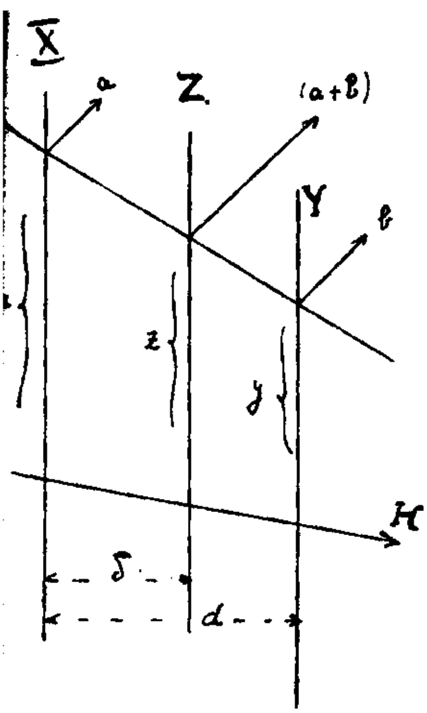
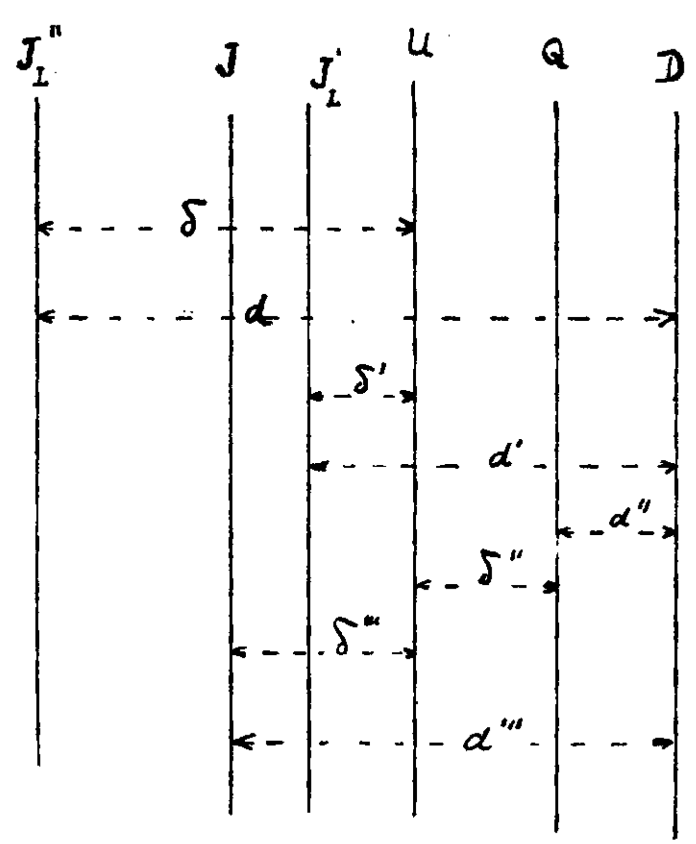


fig 1



figs 2-5

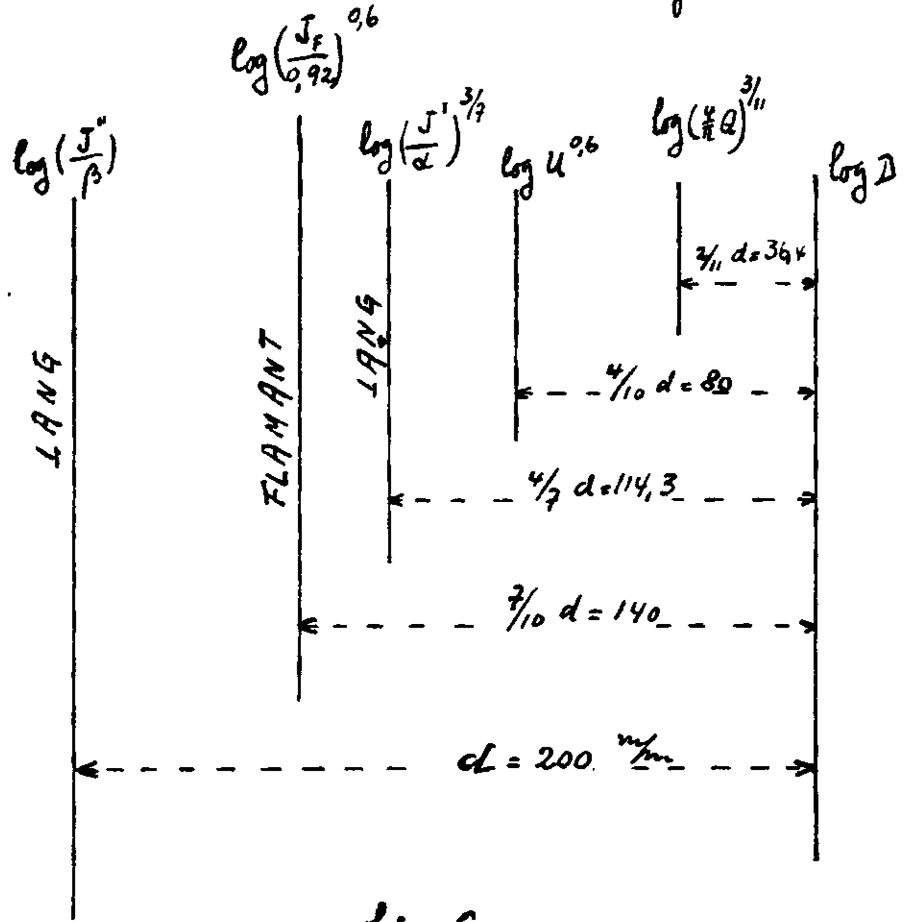


fig. 6.

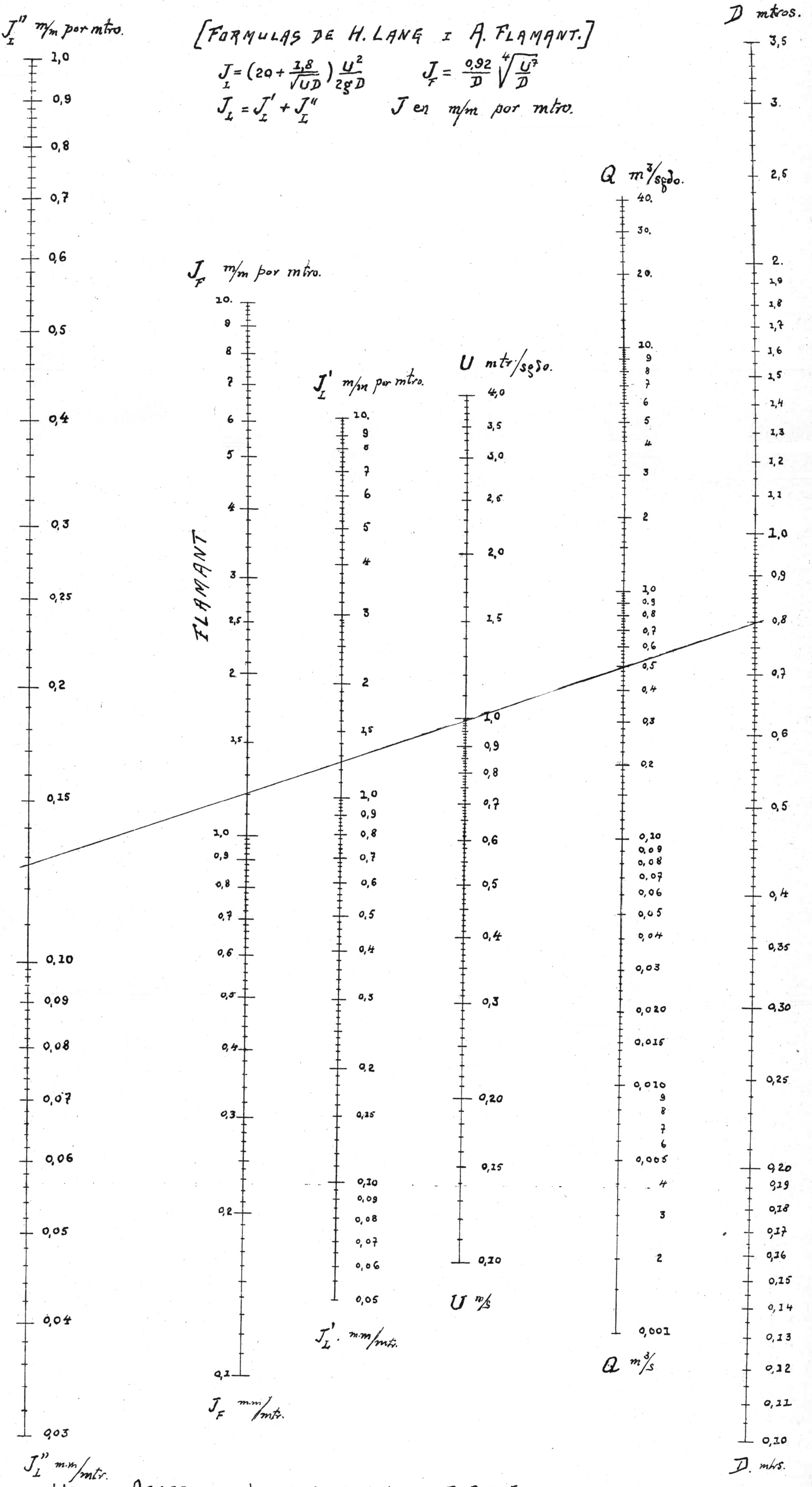
ABACO PARA EL CALCULO DE CAÑERIAS.

Por Ricardo Solar P. i Marcos Pedrero S.

[Formulas de H. Lang i A. Flamant.]

$$J_L = \left(20 + \frac{1,8}{\sqrt{UD}}\right)\frac{U^2}{2gD} \qquad J_F = \frac{0,92}{D}\sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}$$

$$J_L = J_L' + J_L'' \qquad J \text{ en m/m por mtro.}$$



USO DEL ABACO: Las cuatro cantidades D, Q, U, J, se encuentran sobre una misma recta, que quedará fija conocidos dos datos.

Ejemplo. Dados D=0,80 mt U = 1,00 m/s. se obtiene la recta dibujada; luego

Q = 0,500 m³/s LANG J_L = 1,27 + 0,13 = 1,40 m/m/mtr. FLAMANT J_F = 1,21 m/m/mtr.