Exámen sintético-analítico de la disposicion mas económica

PARA CONSTRUCCIONES SIMPLES DE FIERRO

La primera condicion a que debe satisfacer toda construccion técnica i la mas indispensable de todas, es sin duda la *solidez*, que implica que cada una de sus piezas componentes tenga en jeneral las dimenciones necesarias i particularmente una seccion trasversal suficiente para poder resistir al esfuerzo máximo, ya sea compresion o traccion, que en el caso mas desfavorable le pueda afectar.

En armaduras estáticamente determinadas es siempre posible calcular o construir gráficamente los esfuerzos a que están sometidas sus diferentes piezas por las fuerzas esteriores que las solicitan, pudiendo deducir de aquí las dimensiones necesarias i suficientes de sus secciones trasversales por medio del coeficiente de resistencia que corresponda al material respectivo. De este modo, en esta clase de armaduras (en jeneral sistemas triangulares) será fácil llenar una segunda condicion que llamáremos la *condicion económica*, no ménos importante en la práctica que la primera, aunque no tan indispensable.

La fórmula mas corta i comprensiva para enunciar esta condicion económica en su sentido mas lato, es la siguiente:

CONSEGUIR UN FIN TÉCNICO DADO, CONSUMIENDO UNA CANTIDAD MÍNIMA DE MATERIAL.

Para acercarse en lo posible a este ideal económico no basta, como jeneralmente se cree, que ninguna de las piezas componentes (barras de fierro) de la obra tenga una seccion trasversal exajerada i en desproporcion con el esfuerzo máximo a que tiene que resistir, sino que es necesario ademas:

*«Examinar la influencia que sobre la cantidad estrictamente necesaria de material que debe entrar en una construccion (*puente, tijeral etc.*) puedan ejercer variaciones en la disposicion de sus piezas componentes, dentro de un tipo determinado.»*

Para aclarar mas esta idea fundamental consideramos un ejemplo concreto, el tipo de tijeral sistema Polonceau, representado en la figura 1, con un punto de apoyo fijo en A i el otro B movible a lo largo de un plano horizontal. Para elejir un ejemplo numérico supondremos que sobre cada uno de los cuatro campos iguales A D, D C, C E i E B pese una carga contínua i uniforme = 10 toneladas; entónces, repartiendo estas cargas sobre los nudos D, C i E tenemos en cada uno de éstos una fuerza vertical = 10 toneladas i estas tres fuerzas, conjuntamente con las resistencias de apoyo A = B = 20 toneladas, representarán el sistema de fuerzas esteriores.

Los esfuerzos interiores, desarrollados en las barras componentes de nuestro tijeral, se pueden construir gráficamente (segun el método tan sencillo como elegante inventado por el matemático italiano Cremona) de la manera siguiente:

Para tener una escala de fuerzas se elije una distancia cualquiera en que se represente *p. c.* 10 ton. se traza (fig. 2) una distancia vertical $ab = 2m = 20$ ton. la que representa por consiguiente la resistencia de apoyo en A, dirijida de abajo hácia arriba. Por los puntos *a* i *b* se trazan respectivamente paralelas a las barras 1 i 2, obteniendo así el triángulo de fuerzas *a b c*, en el cual los lados *a c* i *e b*, representaban respectivamente (en la escala $m = 10$ ton.) las intensidades de los esfuerzos producidos en las barras 1 i 2. El sentido de rotacion de las flechas en este triángulo de fuerzas es el indicado en la figura 2, i trasladándolas a la figura 1, se llega a saber que la barra 1 sufre compresion i la barra 2 traccion. Pasando del nudo A a D tenemos en este punto dos fuerzas conocidas, la compresion desarrollada en la barra 1 la cual acabamos de determinar, i la fuerza esterior = 10 ton. = *m*, i dos incógnitas que son los esfuerzos producidos en las piezas 3 i 4. Para construir éstos hacemos *a d* = ½ *a b* = *m* = 10 ton. i trazamos por *d* una paralela a A C i por *c* una paralela a D F, obteniendo así el polígono de fuerzas *cadec*, en el cual el lado *e a* representa el esfuerzo 1 correspondiente a la barra 1, *a d* la fuerza esterior en D = *m* = 10 ton. i los lados *d e* i *e c* respectivamente, los esfuerzos correspondientes a las barras 3 i 4; como lo indican las flechas, ambos esfuerzos son compresiones. Pasando finalmente al nudo F, se trata de construir los esfuerzos correspondientes a las barras 5 i 6. Para este fin partimos del punto *b*, recorremos *b c* = esfuerzo 2, en seguida *c e* = esfuerzo 4, por *e* i el punto de partida *b* trazamos respectivamente paralelas a las barras 5 i 6 (la última es horizontal) entónces en el polígono de fuerzas *b c e f b*, los lados *e f* i *f b* con las flechas marcadas, representarán los esfuerzos correspondientes a las barras 5 i 6, ámbas son tracciones. Como tanto la carga cuanto la construccion misma son simétricas con respecto a la vertical que pasa por la cúspide C, quedan determinados los esfuerzos desarrollados en las demas piezas del sistema triangular.

El diagrama de Cremona, trazado en la figura 2, dá evidentemente todos los elementos necesarios para fijar el mínimum de seccion trasversal que corresponde a cada pieza de nuestro tijeral, segun las prescripciones de la «Resistencia de materiales», i como la figura 1 indica sus dimensiones lonjitudinales, resulta que por simples operaciones aritmética i en conformidad con las escalas de lonjitud i de fuerzas adoptadas desde el principio, se puede calcular el volúmen de material necesario i suficiente que deberá entrar en la construccion.

Supongamos ahora que en el tipo representado en la figura 1 se introduzca una variacion A D C F' G' B E en la disposicion de algunas piezas componentes, i que se construya un nuevo diagrama de Cremona correspondiente al tipo variado, i se verá que resultarán esfuerzos diferentes para las piezas componentes de la variacion, i en resultado final, la cantidad de material necesario i suficiente para la nueva construccion será diferente (mayor o menor) de la cantidad que correspondia al tipo primitivo, es decir, habrá una *diferencia económica* entre las dos formas pertenecientes al mismo tipo.

Téoricamente el número de variaciones posibles dentro del mismo tipo es *infinito*, i aunque no todas serán *prácticamente admisibles, siempre existirán ciertos límites de variacion, dentro de los cuales el constructor tendrá libertad completa, para elejir aquella variacion, que sea preferible bajo el punto de vista económico, es decir, aquella que demande ménos material bajo las mismas condiciones de solidez.*

Pero, si el constructor tiene esta libertad, es lójico i aun se puede considerar como un deber profesional de él que haga uso de ella, para acercarse en lo posible al ideal de la condicion económica racional.

El procedimiento indicado para llegar a este fin seria el de un *tanteo jeométrico*, que es cómodo i habla directamente al sentido de la vista; despues de alguna práctica, el tiempo exijido por semejantes operaciones gráficas se reduciria a su minimum, i en todo caso, principalmente en construcciones estensas de fierro, quedará ámpliamente compensado por el ahorro consiguiente de material, que puede llegar a ser mui considerable.

Como las cantidades jeométricas se pueden espresar por números, se comprende a priori que, en vez de un tanteo jeométrico, se podrá en todo caso aplicar el cálculo para llegar a resultados rigurosamente exactos. Con todo, el autor es de opinion que el constructor práctico preferirá el procedimiento gráfico, cómodo i espedito, pues en tipos mas complicados el cálculo requeriria medios analíticos mui estensos i circunstanciados que no son del agrado ni al alcance de todos i ademas demasiado susceptibles de errores mas o ménos gruesos, que en las operaciones jeométricas se revelan a un ojo perspicaz casi en el momento de nacer.

En seguida trataremos algunos ejemplos mui simples, en los cuales el cálculo se puede emplear con ventaja, conduciendo a resultados materialmente exactos.

Para ello necesitamos establecer préviamente un principio nuevo:

La lonjitud de una barra prismática sea l i la superficie de su seccion trasversal $= v$, luego su volúmen $= l\, v$. Supongamos que esta barra tenga que resistir a un esfuerzo S; la superficie v se elije siempre proporcional a S, luego el producto l S será proporcional al volúmen de la barra o sea a su costo. Este producto l S lo llamaremos el *coeficiente económico* E de la pieza de construccion. Cuando una construccion se compone de varias barras sujetas todas a compresion o todas a traccion, su disposicion mas económica será aquella en que la suma de todos los productos l S sea un mínimum.

Establecido este principio del coeficiente económico pasamos a aplicarlo a los siguientes ejemplos:

Ejemplo primero (fig. 3).

Sea P un peso cualquiera atado en una cuerda; fuera de esta i en el mismo plano con ella existan dos puntos fijos A i B, que suponemos capaces de servir de apoyo a palancas sólidas; entónces será posible suspender el peso P por medio de dos puntales de fierro Az i Bz i nos preguntamos: *¿Cuál será la disposicion mas económica de estos puntales?* o sea ¿dónde debe estar situado el punto de amarra z sobre la cuerda, para que la cantidad de material que necesaria i suficientemente debe entrar en los dos puntales sea un mínimum?

Sabemos que en este caso la suma de los dos coeficientes económicos debe ser un mínimum, pues se comprende a priori que ambos puntales sufrirán compresion en el caso de la figura 3, es decir, cuando el punto de amarra está situado arriba de la línea

A B, i ambos estarán sujetos a traccion cuando z está debajo de A B.

La línea A B, que une los dos puntos de apoyo la podemos considerar como una barra imajinaria, para tener así un triángulo A B z compuesto de barras de fierro.

Por medio de un diagrama de Cremona es sumamente sencillo construir los esfuerzos producidos por el peso P en los tres lados del triángulo A B z.

En efecto, para este fin trazamos (fig. 4) una distancia vertical $ab = P$ (escala arbitraria), por a i b paralelas a Az i Bz, obteniendo así el triángulo de fuerzas abc, en que los lados ca i bc representan respectivamente las intensidades S i S' de las compresiones producidas en los puntales Az i Bz cuyas lonjitudes sean l i l'. El coeficiente económico del sistema de construccion formado por los dos puntales será:

$E = lS + l'S'$. Si por c trazamos cd paralelo a AB, la distancia cd representará el esfuerzo (traccion) desarrollado en la barra imajinaria AB (en realidad son dos fuerzas opuestas c' iguales que tienden a separar los apoyos A i B); las distancias da i bd marcan respectivamente las resistencias de apoyo en A i B, las que designaremos con las mismas letras.

Segun la lei de las palancas tenemos inmediatamente:

$$ad = A = \frac{nP}{L} \text{ i } bd = B = \frac{mP}{L},$$

donde L es la lonjitud de AB.

Designamos por m i n los dos siguientes Ac i Bc en que la cuerda divide la línea AB i por x la distancia vertical cz del punto de amarra a la misma línea.

Es fácil ver que los triángulos Acz i cda, asimismo Bcz i cdb son semejantes, por ir sus lados respectivamente paralelos. De aquí se deducen las siguientes proporciones;

$$l : S = x : A$$

$$l' : S' = x : B$$

de donde

$$S = \frac{Al}{x} \text{ i } S' = \frac{Bl'}{x}$$

luego

$$lS = \frac{Al^2}{x} = \frac{P}{Lx} nl^2$$

$$l'S' = \frac{Bl'^2}{x} = \frac{P}{Lx} ml'^2$$

por consiguiente:

(I) $$E = lS + l'S' = \frac{P}{Lx}(nl^2 + ml'^2).$$

Designando el ángulo agudo z C B por *p*, resulta:

$$l^2 = m^2 + x^2 + 2mx \cos p$$

$$l'^2 = n^2 + x^2 - 2nx \cos p$$

luego

$$nl^2 = m^2n + nx^2 + 2mnx \cos p$$

$$ml'^2 = mn^2 + mx^2 - 2mnx \cos p$$

i sumando

$$nl^2 + ml'^2 = mn(m+n) + (m+n)x^2 = (mn + x^2)L.$$

Sustituyendo esta espresion en la ecuacion (I) resulta:

$$E = P\left(\frac{mn}{x} + x\right),$$

i como P es un factor independiente de x, se trata de determinar el valor de x que produzca un *valor mínimo* de la funcion:

$$y = \frac{mn}{x} + x$$

Para que tenga lugar un máximum o un mínimum es necesario que la primera derivada y' sea $= 0$.

Resulta así:

$$y' = -\frac{mn}{x^2} + 1 = 0,$$

o sea

$$x = \sqrt{mn}$$

Como se vé x aparece en una forma en que puede ser afectatada del signo mas o del signo ménos.

Si en el caso de la fig. 3, donde los puntales sufren compresion, consideramos x como positivo, tendremos que considerarlo como negativo cuando el punto de amarra esté situado debajo de AB, en cuyo caso los puntales sufririan traccion,

Examinemos con respecto al primer caso, si $x = +\sqrt{mn}$ produce un valor máximo ó mínimo de nuestra funcion y. Para este fin necesitamos la segunda derivada:

$$y'' = -(-2)\frac{mn}{x^3} = +\frac{2mn}{x^3}$$

Como en este caso x es positivo, resulta que la segunda derivada es *positiva*, lo que indica un *mínimum* de la funcion y, que es lo que queríamos.

En el segundo caso (x negativo), los dos esfuerzos S i S' resultan negativos, lo que debia suceder, porque si las compresiones se consideran como esfuerzos positivos, las tracciones tendrán que considerarse como esfuerzos negativos. Siendo x negativo, la segunda derivada $y'' = +\frac{2mn}{x^3}$ resulta negativa tambien, lo que nos indica un *valor máximo aljebráico* del coeficiente económico. Pero hai que tener presente que, tratándose de *cantidades variables negativas* (S i S') este *máximum aljebráico* es en realidad un *mínimum absoluto* o aritmético.

En resúmen i para ámbos casos llegamos al siguiente resultado:

«EN EL EJEMPLO PROPUESTO, LA DISPOSICION MAS ECONÓMICA DE LOS PUNTALES ES AQUELLA EN QUE LA DISTANCIA VERTICAL DEL PUNTO DE AMARRA A LA RECTA QUE UNE LOS PUNTOS DE APOYO, ES MEDIA PROPORCIONAL JEOMÉTRICA ENTRE LOS SEGMENTOS EN QUE ESTA RECTA QUEDA DIVIDIDA POR LA CUERDA.

Segundo ejemplo: mm (figura 5) sea una muralla inclinada; fuera de ella exista un punto fijo A que sirva de apoyo a una palanca sólida AB, la que consideramos inmovible i sin peso, Su estremo B esté solicitado por una fuerza cualquiera P = BC. El punto B se podrá sostener por medio de un puntal Bx que por su parte vendria a apoyarse en la pared oblícua. Se impone la pregunta: *¿Cuál será la disposicion mas económica del puntal Bx?*

Es evidente que en el caso indicado en la fig. 5 el puntal Bx sufrirá una compresion, cuya intensidad es de mui fácil construccion. En efecto, trazando CD paralelo a AB, tenemos el triángulo de fuerzas BCD, en el cual CD representa la compresion producida en la palanca AB (la que no nos importa en el presente exámen) i DB = S la compresion que afecta al puntal Bx, cuya lonjitud la designamos por *l*.

El coeficiente económico de nuestro puntal es:

$$E = lS = Bx \times DB$$

Designando por g el ángulo agudo que la prolongacion de la palanca AB forma con la pared mm i por x el ángulo variable que la prolongacion del puntal xB forma con AB, tenemos en el triángulo xBE la proporcion:

$$Bx : BE = \operatorname{sen} BEx : \operatorname{sen} BxE$$

o sea:

$$l : a = \operatorname{sen} q : \operatorname{sen} (x + q),$$

luego:

(1) $$l=\frac{a \text{ sen } q}{\text{sen } (x+q)}$$

Si por B bajamos B F perpendicular a C D, es fácil convencerse que B F = h es independiente del ángulo variable x.

Del triángulo rectángulo B F D se deduce inmediatamente:

$$\frac{B\,F}{B\,D}=\text{sen } x, \quad \text{o sea } \frac{h}{S}=\text{sen } x,$$

luego:

(2) $$S=\frac{h}{\text{sen } x}$$

Multiplicando las ecuaciones (1) i (2) resulta:

$$E=lS=\frac{ah \text{ sen } q}{\text{sen } x \text{ sen } (x+q)}$$

Se trata de determinar el valor del ángulo x que produzca un *valor mínimum* de E.

El coeficiente económico E nos aparece esta vez en forma de una fraccion, cuyo numerador lo componen los tres factores $a=BE$, $h=BF$ i $q=\angle BEx$, todos independientes del ángulo variable x, por consiguiente el valor *mínimum* de E se producirá cuando el denominador

$$y=\text{sen } x \text{ sen } (x+q)$$

llegué a su *valor máximum.*

Derivando resulta:

$$y'=\text{sen } x \cos (x+q)+\cos x \text{ sen } (x+q)=0,$$

o sea

$$y'=\text{sen } (2x+q)=0$$

Esta ecuacion admite dos soluciones esencialmente diferentes:

(a) $2x+q=0$

(b) $2x+q=180^{\circ}$

Dejando a un lado por ahora la solucion (a) que daria un ángulo x negativo: $x' = -\frac{q}{2}$, es fácil convencerse que el ángulo x que dá la solucion (b) produce un valor máximum de y. En efecto, sacando la segunda derivada tenemos:

$$y'' = 2 \cos (2x + q) = 2 \cos 180^0 = -2,$$

es decir la segunda derivada resulta negativa.

La solucion (b) $2x + q = 180^0$, sin necesidad de despejar a x, admite una interpretacion jeométrica inmediata. En efecto, ella queda satisfecha si $< ExB = < EBx = x$, es decir cuando el triángulo BxE es isóceles ($Ex = EB$) siendo su base el puntal Bx.

La primera solucion (a) $2x + q = 0$ corresponde al puntal Bx' (sujeto a traccion) siendo $Ex = EB$, pues es fácil ver que en esta situacion del puntal se tiene:

$$x = -\frac{q}{2} \quad \text{osea} \quad 2x + q = 0$$

En resúmen tenemos:

LA DISPOSICION MAS ECONÓMICA DEL PUNTAL ES AQUELLA EN QUE FORMA LA BASE DE UN TRIÁNGULO ISÓCELES, FORMADO ADEMAS POR LA PARED I LA PROLONGACION DE LA PALANCA FIJA.

Como se vé, en los dos ejemplos tratados el cálculo ha conducido a resultados matemáticamente exactos.

El autor se reserva estender el método sintético-analítico indicado a otros tipos de construccion ménos sencillos, e invita a otros mas competentes a que dirijan sus esfuerzos a este mismo problema todavía poco esplorado i que puede dar resultados provechosos en la práctica.

JULIO PFLÜGER

Lámina de Figuras N.º 1